

IF UFF- Curso de Física Estatística

5ª Lista - 2º semestre 2016

Prof. Anna Chame

0 - (sobre gás ideal clássico no grande canônico) Considere um gás ideal clássico composto por N partículas, em um recipiente de volume V , em contato com um reservatório térmico (à temperatura T). O gás é descrito por

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m}$$

a) Calcule a função de partição canônica para este gás clássico, considerando o espaço de fase. Introduza o fator $1/N!$ e o fator $1/h^{3N}$. Mostre que a função de partição é dada por $Z(\beta, N) = \frac{1}{N!h^{3N}} \left(\frac{\pi 2m}{\beta}\right)^{3N/2} V^N$

(b) Considere agora que o gás está em contato com um reservatório térmico (à temperatura T) e de partículas (potencial químico μ). Calcule a grande função de partição Ξ e o grande potencial termodinâmico.

(c) No formalismo do ensemble grande canônico, calcule o número médio de partículas $\langle N \rangle$ do gás.

(d) Calcule a pressão p do gás e escreva p em termos do número médio de partículas calculado no item anterior, do volume V e da temperatura T .

1- (Reif 9.1) Considere um sistema consistindo de duas partículas, cada uma delas podendo estar em qualquer um de três estados quânticos, associados a energias 0 , ϵ e 3ϵ . O sistema está em contato com um reservatório térmico a temperatura $T = (k_B\beta)^{-1}$

(a) Escreva uma expressão para a função de partição canônica Z se as partículas obedecem à estatística clássica de MB e são consideradas distinguíveis.

(b) Qual seria a expressão para Z se as partículas obedecessem a estatística de BE ?

(c) Qual seria a expressão para Z se as partículas obedecessem a estatística de FD ?

2- Mostre que o número de maneiras de distribuir N bósons idênticos em K estados é dado por

$$I_B = \frac{(K + N - 1)!}{(K - 1)!N!}$$

Para férmions, mostre que este número é dado por

$$I_F = \frac{K!}{(K - N)!N!}$$

$$(N \leq K)$$

3 - Um gás ideal de N partículas idênticas, em um volume V , está em equilíbrio à temperatura T . A energia total do sistema E é dada por $E = \sum_j n_j \epsilon_j$, onde n_j é o número de ocupação do estado de partícula única de energia ϵ_j . O número de partículas $N = \sum_j n_j$ é fixo. Usando o ensemble canônico, re-obtenha a expressão já conhecida para o valor médio $\langle n_j \rangle$ (Ver seção 9.3 Reif)

- (a) se as partículas do gás forem férmions.
- (b) se as partículas do gás forem bósons.

4 - Salinas 8.5 (Reif 9.4) a) Um gás ideal de N átomos de massa m está contido em um recipiente de volume V , a uma dada temperatura T . Calcule o potencial químico desse gás no limite clássico (sugestão: imponha que $N = \langle N \rangle$ no formalismo do ensemble grande canônico, usando a expressão da grande função de partição no limite clássico)

b) Considere agora um "gás bidimensional", constituído por N_A partículas livres adsorvidas sobre uma superfície de área A . A energia de uma partícula adsorvida é dada por

$$\epsilon_A = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \epsilon_0$$

onde $\vec{p}$ é o momento (bidimensional) e $\epsilon_0 > 0$ é a energia de ligação que mantém a partícula presa à superfície .

No limite clássico, calcule o potencial químico μ_A do gás adsorvido .

c) A condição de equilíbrio entre as partículas adsorvidas na superfície e as partículas do gás tridimensional pode ser expressa em termos dos respectivos potenciais químicos. Utilize essa condição para encontrar a densidade superficial de partículas adsorvidas em termos da temperatura e da pressão p exercida pelo gás envolvente.

5- (~ Salinas 8.3) Mostre que um gás ideal de férmions, contido em um volume V , obedece à equação de estado :

$$PV = \frac{2U}{3}$$

Para isso:

a) obtenha uma expressão para a pressão P , usando a conexão do ensemble grande canônico com a termodinâmica.

b) Escreva uma expressão para a energia interna U como um somatório envolvendo os números de ocupação médios $\langle n_j \rangle$ de cada nível de energia de partícula única ϵ_j .

c) Desenvolva essas expressões. Para isso, no limite termodinâmico, transforme os somatórios em integrais em d^3k .

d) Transforme as integrais em k em integrais na variável $\epsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$. Compare-as e mostre que $PV = \frac{2U}{3}$.

6- ($\sim$ Salinas 9.6) Considere um gás de N elétrons livres no regime ultra-relativístico ocupando um recipiente de volume V . Nesse regime, a relação entre a energia e o momento linear pode ser aproximada por $\epsilon = |\vec{p}|c$.

a) Determine a energia de Fermi desse gás.

b) Qual a energia do gás no estado fundamental ?

7- ($\sim$ Salinas 10.2) Considere um gás de bósons livres em duas dimensões (numa região de área A). Mostre que não há condensação de Bose-Einstein neste caso, já que a temperatura de Bose-Einstein se anula.

8- ($\sim$ 10.4) Considere um gás de bósons não-interagentes cujo espectro de energia é dado pela expressão $\epsilon = \hbar c |\vec{k}|$, onde $\hbar$ e c são constantes e $\vec{k}$ é um vetor de onda.

a) Calcule a pressão exercida pelo gás quando o potencial químico for nulo.

b) Compare seu resultado com a expressão da pressão de radiação exercida por um gás de fótons.

9- Para um gás ideal de bósons, determine a razão entre a densidade do condensado e a densidade total do sistema como função de T/T_0 , onde T_0 é a temperatura de transição.

10- ($\sim$ Salinas 8.3)

A partir da expressão para o grande potencial, no ensemble grande canônico, mostre que um gás ideal de bósons obedece à equação de estado :

$$PV = \frac{2U}{3}$$